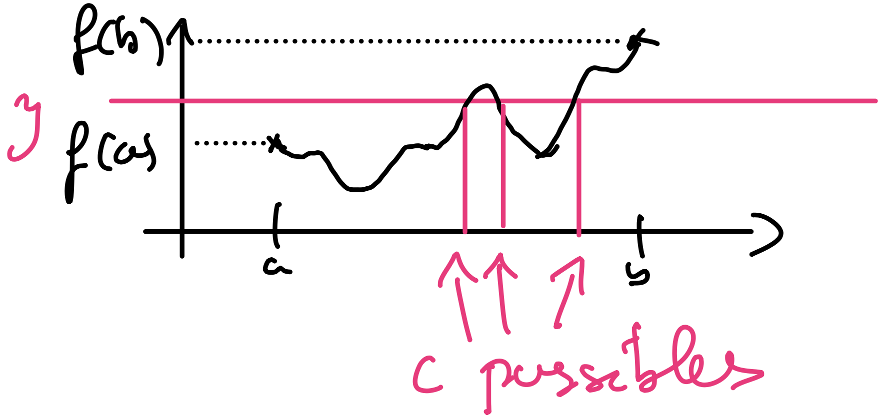
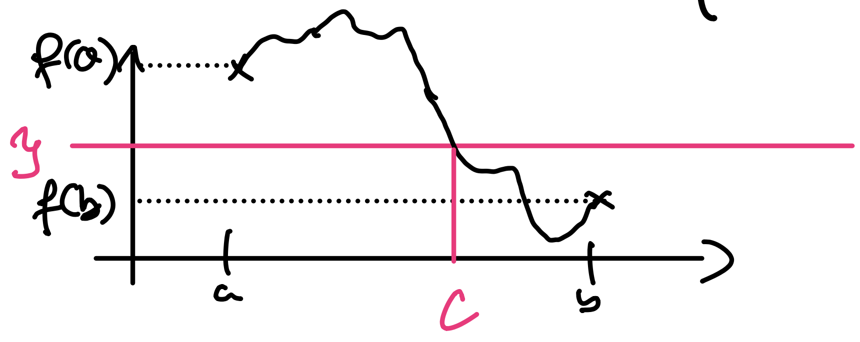
Info : Examen blanc + corrigé sur moodle vendredi.

Rappel TVI : $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle $f \in C^0(I)$, $a<b \in I$.

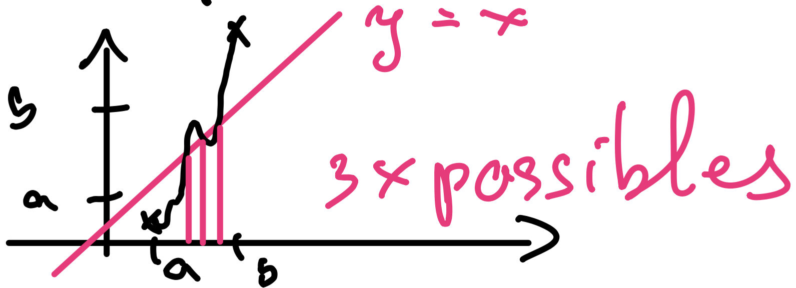
$\forall y$ entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists\, c \in [a,b]$ tq $f(c)=y$





Proposition 5.20 :

Soient $a<b$, $f \in C^0([a,b])$ tq $f(a) \leq a$, et $f(b) \geq b$. Alors $\exists$ $x \in [a,b]$ tq $x = f(x)$.



$g(x) = f(x) - x$

$g(a) \leq 0$, $g(b) \geq 0$

Chapitre 6 La dérivée

§6.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 6.1 :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) Soit $x_0 \in D$, supposons que f est définie au voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existe.}$$

On note alors cette limite $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$ qu'on appelle la dérivée de f en x_0

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f est <u>dérivable</u> si $\forall x_0 \in D$, f est dérivable en x_0.

La <u>dérivée</u> de f est alors la fonction

$f' : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

<u>Exemples 6.2</u> :

(i) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$

Alors, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{n-1} x^j x_0^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_0^j x_0^{n-1-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} x_0^{n-1} = (n-1-0+1)\, x_0^{n-1} = n x_0^{n-1}$$

Et donc f est dérivable et $f'(x) = n.x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)$

$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

On a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{\to \cos(x_0)} = 1 \cdot \cos(x_0) = \cos(x_0)$$

Ainsi, f est dérivable et $f'(x) = \cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$

Discutons la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

Or,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

et $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$

limite à gauche et limite à droite ne coïncident pas $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ n'existe pas

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 0

<u>Proposition 6.3</u>

Soient $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0. Alors, f est continue en x_0

<u>**Preuve**</u> : <u>Àm</u> : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0)$$

Feinte du Loup

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{f(x_0)}_{\to f(x_0)}$$

Feinte du Bison

$$= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \qquad \blacksquare$$

Propriétés Algébriques

Proposition 6.4

Soient $x_0 \in D$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0, $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0, $f(D) \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$ et $h : F \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $f(x_0)$ et dérivable en $f(x_0)$. Alors

(i) $\alpha \cdot f$ est dérivable en x_0 et $(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$

(ii) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(iii) $f \cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

(iv) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$

(v) $h \circ f$ est dérivable en x_0 et $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

(vi) Si $\exists\, \delta > 0$ tq $\forall x \in\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $\varphi(x) = f(x)$, on a que φ est dérivable en x_0 et $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$

<u>Proposition 6.5</u> Dérivées usuelles

Soient $c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $a \in \mathbb{R}$

D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-1, 1[$
$f(x)$	c	x^n	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	e^x	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\arcsin(x)$
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	e^x	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$]0,+\infty[$	$]0,+\infty[$
$f(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$	$\log(x)$	$x^a = e^{a\cdot\log(x)}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x}$	$a\cdot x^{a-1}$

<u>Définition 6.6</u> (dérivable à gauche, dérivable à droite)

Soient $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$

(i) Supposons que f est définie à gauche en x_0. On dit que f est <u>dérivable à gauche en x_0</u> si la limite

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existe. On la note alors

$$f_g'(x_0)$$

(ii) Supposons que f est définie à droite de x_0.
On dit que f est <u>dérivable à droite</u> en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe.}$$

On écrit alors $f'_d(x_0)$ pour cette limite

(iii) Supposons que $D = [a, b]$, avec $a < b$. On dit que f est <u>dérivable</u> si $\forall x_0 \in]a, b[$ f est dérivable en x_0, f est dérivable à droite en a et à gauche en b.

(iv) Supposons que $D = [a, +\infty[$. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in]a, +\infty[$, f est dérivable en x_0 et f est dérivable à droite en a

(v) Supposons que $D =]-\infty, b]$. On dit que f est dérivable si $\forall x_0 \in]-\infty, b[$, f est dérivable en x_0 et f est dérivable à gauche en b.

Remarque 6.7

On a que f est dérivable en x_0 si seulement si, f est dérivable à droite, dérivable à gauche en x_0 et et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

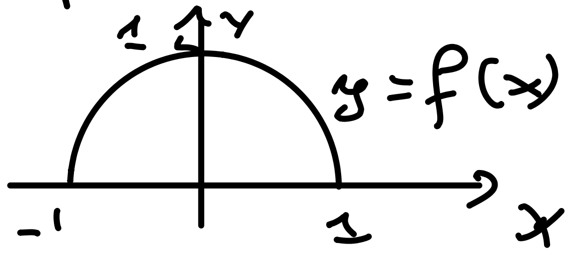
<u>Exemples 6.8</u> :

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

Alors, $f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$

(ii) Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} =$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x+1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}{1+x}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\sqrt{1-x} \to \sqrt{2}}{\sqrt{1+x} \to 0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en -1

Idem $\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$

f n'est pas dérivable à gauche en 1.

Exemple 6.9 (Dérivabilité de fonctions définies par étapes)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

genre de choses dont on parle ici

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

⚠ problème : $\frac{\sin(x)}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}$??

On doit étudier $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

(i) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, $a \in \mathbb{R}$ et la fonction

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq a \\ g(x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Supposons que : $\begin{cases} f(a) = g(a) & \leftarrow (1) \\ f'(a) = g'(a) & \leftarrow (2) \end{cases}$

Montrons que h est dérivable.

Pour $x_0 > a$, h est dérivable et $h'(x_0) = f'(x_0)$ (Prop 6.4 (vi))

Pour $x_0 < a$, h est dérivable et $h'(x_0) = g'(x_0)$

Reste $\boxed{x_0 = a}$. On a

$$\lim_{x \to a^-} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - f(a)}{x - a} \overset{(1)}{=} \lim_{x \to a^-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= g'_g(a) = g'(a)$$

$$\lim_{x \to a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a) = f'(a)$$

Pour finir, $h'_g(a) = g'(a) \overset{(2)}{=} f'(a) = h'_d(a)$

et donc, h est dérivable en a.

$\Rightarrow$ h est dérivable.

(iii) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables, $a, c \in \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > a \\ c & \text{si } x = a \\ g(x) & \text{si } x < a \end{cases}$$

si $\begin{cases} f(a) = g(a) = c \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$

h est dérivable.

(iii) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ des paramètres, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \text{si } x > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma & \text{si } x = 0 \\ \alpha + \cos(\beta x) + \sin(\gamma x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour quels $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, h dérivable sur $\mathbb{R}$?

$h'(x) = 2\alpha x + \beta$ si $x > 0$

$h'(x) = -\beta \sin(\beta x) + \gamma \cos(\gamma x)$ si $x < 0$

gratuit !

En 0 :

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + \beta + \gamma & (f(a) = c) \\ \alpha + 1 = \alpha + \beta + \gamma & (g(a) = c) \\ \beta = \gamma & (f'(a) = g'(a)) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}$, h est dérivable

§6.2 Continuité de la dérivée et dérivées d'ordre supérieur

<u>Définition 6.10</u> : Continument dérivable, $C^k(D)$, dérivée d'ordre n.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ dérivable.

(i) Si $f' \in C^0(D)$, on dit que f est <u>continument dérivable</u> et on note $f \in C^1(D)$,

$$C^1(D) = \{ g \in C^0(D) : g \text{ est continument dérivable} \}$$

On dit aussi que f est de classe C^1.

(ii)